هندسة الميكانيك العام

السنة الثانية

المبادئ العامة لتحريك الجسيم

م.غيث برهاني

4/11/2015

عملي 03

S.P 35

10

فريق الكريات الحمراء التطوعي

RBC HAMAK

التحريك

تنويه:

للمذاكرة شقان،شق نظري وشق عملي:

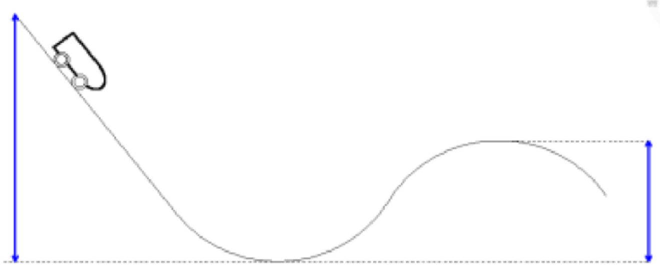
الشق النظري: سؤال واحد

الشق العملي مسألتان: 1- المسألة الأولى علاقة أساسية في التحريك من النوع الأول أو الثاني.

2- اما المسألة الثانية:مبدأ العمل والطاقة الحركية لجسيم مادي.

مسائل الشعبة الأولى

المسألة الأولى:/تحريك الجسيم المادي(مبدأ العمل والطاقة الحركية)/:



يبدأ جسيم على شكل عربة صغيرة وزنها(ثقلها) P بالانزلاق من السكون في الموضع A خلال المسار A,B,C والمكون من ارتفاعات وانخفاضات متتالية والواقع في مستو شاقولي (في مستوي شاقولي يصبح لقوة الثقالة عمل اما في الأفقي عملها معدوم لان الارتفاع الشاقولي H يساوي صفر)

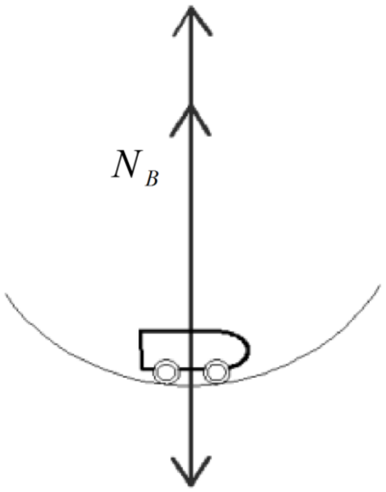
المطلوب:1- أوجد قوة رد فعل المسار على العربة عند وصولها الموضع B الذي عنده تكون $\rho_B = 6\ m$, $HA_B = 12m$, $HB_C = 4.5\ m$

2 – أصغر قيمة لنصف قطر تقوس المسار عند C بحيث لاتفقد العربة تماسها مع المسار.

الحل: لإيجاد رد الفعل نطبق العلاقة الأساسية في التحريك على الجسيم في الموضع B

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{A} \Rightarrow \vec{W} + \vec{N}_B = m.\vec{A_B}$$

نسقط على الناظم وجهته نحو داخل التقوس(نحو الأعلى):$\vec{n}$:



$$N_B.P = m.A_B^n \Rightarrow N_B = m.\frac{v_B^2}{\rho_B} + P$$

$$N_B = m.\frac{v_B^2}{\rho_B} + m.g \dots 1$$

نلاحظ ان لدينا v_B^2 مجهول لحسابه نطبق مبدأ العمل والطاقة الحركية بين موضعين

A (حيث $v_A = 0$) و B(حيث$v_B = ?$):

$$\frac{1}{2}m.v_B^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = \Sigma W_F = W_P + W_{NB}$$

حيث: $\frac{1}{2}m.v_A^2 = 0 , W_{NB} = 0$ (عمودي على الانتقال)

$$\frac{1}{2}m.v_B^2 = W_P = m.g.H \quad (H \text{ انتقال شاقولي})$$

$$v_B^2 = 2g.H = 24g$$

نعوض في العلاقة 1 فنجد ان:

$$N_B = m.\frac{24g}{\rho_B} + m.g$$

ولكن $\frac{P}{g} = m$, $\rho_B = 6\ m$:

$$N_B = \frac{P}{g}.\frac{24g}{6} + \frac{P}{g}.g$$

$$N_B = P(4+1) = 5P \quad N$$

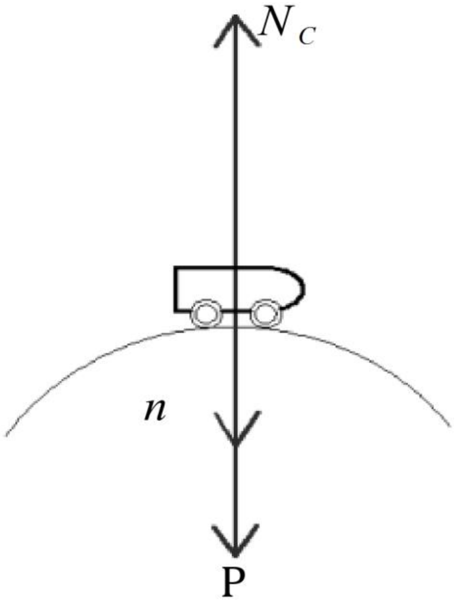
كي لاتفقد العربة تماسها مع المسار: $N_c > 0$:

ولإيجاد علاقة N_C نطبق العلاقة الأساسية في التحريك في الموضع C فيكون:

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{A}$$

$$\vec{P} + \overrightarrow{N_C} = m.A_C^n$$

نسقط على $\vec{n}$ (المعين على الرسم):



$$P - N_C = m.A_C^n \ \Rightarrow N_C = P - m.A_C^n$$

نعوض في متراجحة الشرط:

$$N_C > 0 \ \Rightarrow P - m.A_C^n > 0 \ \Rightarrow P > m.A_C^n$$

$$\Rightarrow m.g > m.\frac{v_C^2}{\rho_C} \Rightarrow \ \rho_C > \frac{v_C^2}{g}$$

لإيجاد v_C^2 طبق مبدأ العمل والطاقة خلال الانتقال بين B(حيث $v = v_B$) و C(حيث $v_C = ?$)

$$\frac{1}{2}m.v_C^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = \Sigma W_F = W_P + W_{NC}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}m.v_C^2 = \frac{1}{2}m.v_B^2 + (-m.g.h)$$

الإشارة سالبة لان الانتقال نحو الأعلى

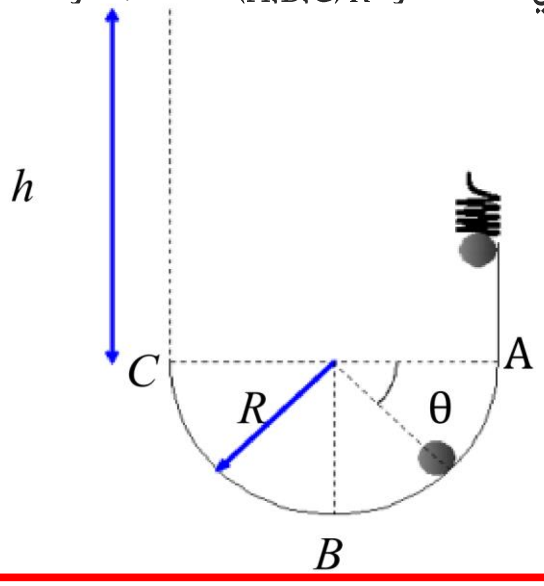
$$v_C^2 = v_B^2 - g.h = 24g - 4.5g = 19.5g$$

نعوض في المتراجحة

$$\rho_C > \frac{19.5g}{g} \ \Longrightarrow \ \rho_C > 19.5\,m$$

المسألة الثانية:

جسيم مادي على شكل كرة صغيرة كتلتها m تمس نابض مضغوط بمقدار Δl ثابت صلابته k تترك الكرة دون سرعة ابتدائية لتتحرك على المسار الدائري الاملس الذي نصف قطره R (A,B,C) نقاط المسار



والمطلوب:

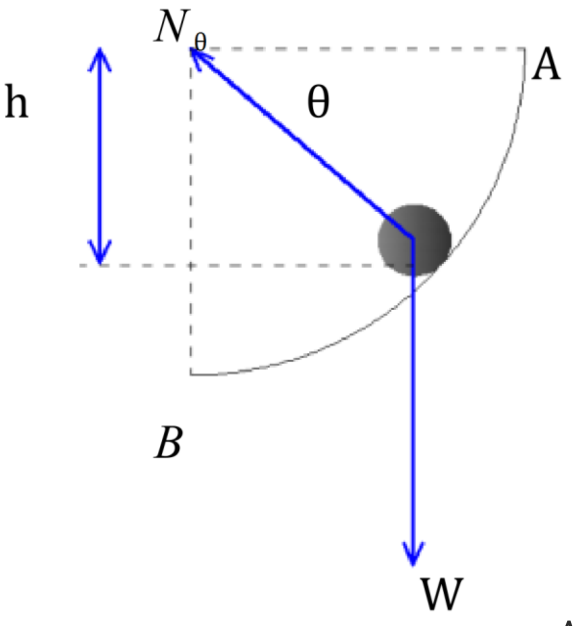
1) عين علاقة سرعة الجسيم بدلالة θ

2) علاقة رد الفعل الناظمي بدلالة θ وقيمته العظمى

3) علاقة ثابت صلابة النابض حتى يستطيع بلوغ الارتفاع h بعد مغادرته المسار الدائري عند C

الحل:

1) لإيجاد السرعة عند الوضع العام نطبق مبدأ العمل والطاقة بين وضعين A(حيث $v_A = 0$) والوضع العام θ(حيث $v_\theta = ?$)



$$\frac{1}{2}m.v_\theta^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = \Sigma W$$

$$\frac{1}{2}m.v_\theta^2 = W_W + W_{N\theta} + W_k$$

حيث: W_k (عمل مرونة النابض)

$W_{N\theta} = 0$ (عمودي على الانتقال)

$$\frac{1}{2}m.v_\theta^2 = m.g.H + 0 + \frac{1}{2}K(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$$

حيث: Δl_{fin}^2 (الاستطالة النهائية) , Δl_{in}^2 (الاستطالة الابتدائية)

ولكن $\Delta l_{fin}^2 = 0 \Leftarrow$ $\frac{1}{2}m.v_\theta^2 = m.g.H + \frac{1}{2}K\Delta l_{in}^2$

$$\Rightarrow v_\theta^2 = 2g.H + \frac{K}{m}.\Delta l^2 = 2g.R.sin\theta + \frac{K}{m}.\Delta l^2 \dots 1$$

2) لإيجاد رد الفعل في لبموقع θ(إيجاد علاقة) نطبق العلاقة الاساسية في التحريك على الجسيم في الموضع θ وبإسقاطها على الناظم وبجهته:

$$\Sigma\vec{F} = m.\overrightarrow{A_\theta}$$

$$\overrightarrow{W} + \overrightarrow{N_\theta} = m.\overrightarrow{A_\theta}$$

$$-W.sin\theta + N_\theta = m.A_\theta^n$$

$$\Rightarrow N_\theta = m.A_\theta^n + W.sin\theta$$

ولكن: $A^n = \frac{v^2}{R}$

$$\Rightarrow N_\theta = m.\frac{v^2}{R} + m.g.sin\theta$$

ومن العلاقة 1:

$$\Rightarrow N_\theta = m.\left(\frac{2g.R.sin\theta + \frac{K}{m}.\Delta l^2}{R}\right) + m.g.sin\theta$$

$$N_\theta = \frac{2m.g.R.sin\theta + K.\Delta l^2}{R} + m.g.sin\theta$$

$$N_\theta = 2m.g.sin\theta + \frac{K}{R}.\Delta l^2 + m.g.sin\theta$$

$$N_\theta = 3m.g.sin\theta + \frac{K}{R}.\Delta l^2 \quad ...1$$

بما ان المتغير الوحيد هوθ تبلغ N_θ قيمتها العظمى عندما $\sin\theta = 1$ اقصى قيمة لها أي $\theta = 90°$

$$\Rightarrow N_{90°} = 3m.g + \frac{K}{R}.\Delta l^2$$

3) ملاحظات لحل الطلب الثالث:

حتى يعبر: $v_C > 0 \quad , \quad N_C > 0$

يترك(يغادر): $v_C > 0 \quad , \quad N_C = 0$

يعود إلى B: $v_C = 0 \quad , \quad N_C > 0$

يسقط: $v_C = 0 \quad , \quad N_C = 0$

حيث C هي النقطة المدروسة.

الحل:

لإيجاد K نطبق مبدأ العمل والطاقة بين وضعين C (حيث $v_C > 0$) و D (حيث $v_D = 0$) (لان الجسم وصل الى ارتفاع H بعد مغادرته المسار ثم استقر في الهواء آنيا)

$$\frac{1}{2}m.v_D^2 - \frac{1}{2}m.v_C^2 = \Sigma W$$

$$\frac{1}{2}m.v_C^2 = W_W = -m.g.H \dots 3$$

الإشارة سالبة لأن عمل الثقالة مقاوم

الإشارة سالبة لأن القوة معاكسة للانتقال

من علاقة السرعة:

$$v_\theta^2 = 2g.Rsin\theta + \frac{K}{m}.\Delta l^2$$

النقطة C توافق $\theta = 180° \Longleftarrow sin\theta = 0$:

$$v_\theta^2 = 0 + \frac{K}{m}.\Delta l^2$$

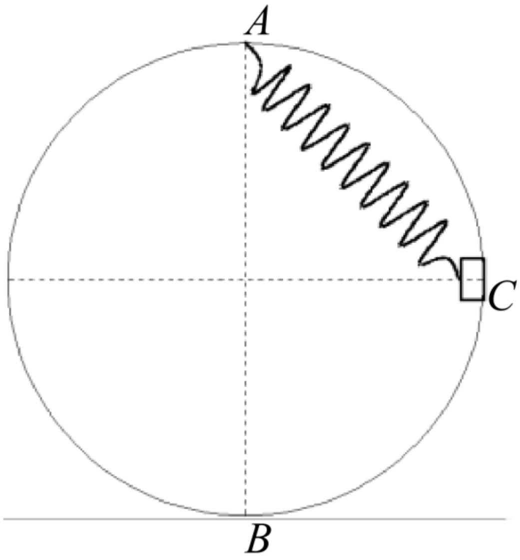
بالتعويض في العلاقة 3:

$$\frac{1}{2}m.\left(\frac{K}{m}.\Delta l^2\right) = m.g.H$$

$$\Rightarrow K = \frac{\Delta l^2}{2.Hm.g}$$

وهو المطلوب.

المسألة الثالثة:



جسيم وزنه $W = 5\ N$ معلق بواسطة نابض

ثابت صلابته K بأعلى نقطة A في حلقة مستديرة نصف قطرها

$R = 20\ cm$ تقع في مستو شاقولي يبدأ الجسيم

بالانزلاق من السكون وبدون احتكاك على السطح الداخلي

من الحلقة بالوضع C المحدد بالزاوية $90°$ عندها كان النابض

بطوله الحر

المطلوب:

علاقة سرعة الجسيم بدلالة K عند B.

قوة ضغط الجسيم على الحلقة بدلالة K $(N_B = f_K)$ ورد الفعل(قوى القيد)عند الموضع B.

قيمة K عندما يصبح ضغط الجسيم على الحلقة صفر.

الحل:

ملاحظة:عندما يكون النابض بطوله الحر يكون $(\Delta l_{in}^2 = 0)$ ويحسب Δl من القانون:

$$\Delta l = l - l_0$$

حيث $\left(\text{الطول الحر للنابض}\right) l_0$, $\left(\text{الطول اللحظي}\right) l$

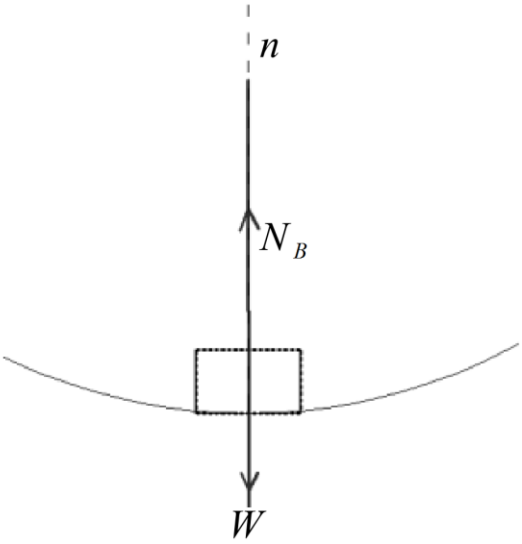
في هذه المسألة...يحسب الطول الحر للنابض من فيثاغورث:

$$l_0 = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$$

ولحساب السرعة نطبق مبدأ العمل والطاقة بين وضعين C(حيث $v_C = 0$) و B(حيث $v_B = ?$)

$$\frac{1}{2}m.v_B^2 - \frac{1}{2}m.v_C^2 = W_W + W_{N\theta} + W_{fK}$$

$$\frac{1}{2}m.v_B^2 = m.g.R + (\frac{1}{2}K(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2))$$



$$v_B^2 = 2g.R + \frac{K}{m}\left(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2\right)$$

ولكن: $\Delta l_{in} = 0 \quad , \quad \Delta l_{fin} = 2R - l_0$

$$\Rightarrow \Delta l_{fin} = 2R - R\sqrt{2} = R\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow v_B^2 = 2g.R + \frac{K}{m}\left(-R^2\left(2 - \sqrt{2}\right)^2\right)$$

$$v_B^2 = 2g.R - \frac{K}{m}R^2\left(2 - \sqrt{2}\right)^2$$

2) لإيجاد رد الفعل نطبق العلاقة الأساسية في التحريك في الموضع B:

$$\Sigma\vec{F} = m.\overrightarrow{A_B} \Rightarrow \overrightarrow{W} + \overrightarrow{N_B} = m.\overrightarrow{A_B}$$

نسقط على $\vec{n}$ (نسقط على الناظم وبجهته):

$$-W + N_B = m.A_B^n \Rightarrow N_B = m.A_B^n + W$$

$$N_B = m.\frac{v_B^2}{R} + W$$

$$N_B = m.\frac{2g.R - \frac{K}{m}R^2\left(2 - \sqrt{2}\right)^2}{R} + W$$

$$N_B = m\left(2g - \frac{K}{m}R\left(2 - \sqrt{2}\right)^2\right)$$

$$= 2m.g - K.R\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 + W$$

$$N_B = 2W - K.R\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 + W$$

3) قيمة K عندما الضغط $N_B = 0$:

$$0 = -K.R\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 + 3W \Rightarrow K = \frac{3W}{R\left(2 - \sqrt{2}\right)^2}$$

مسائل الشعبة الثانية

المسألة الأولى:

يبدأ جسيم وزنه $P = m.g$ حركته من السكون من الموضع A ينزلق إلى الأسفل على سطح أملس ABC حيث BC يمثل محيط نصف دائرة نصف قطرها R أوجد:

1) علاقة سرعة الجسيم عند وصوله النقطة B بدلالة H $v_B = f(H)$

2) علاقة سرعة الجسيم أثناء حركته على المسار BCبدلالة الزاوية θ والارتفاع H، $v_\theta = f(\theta, H)$

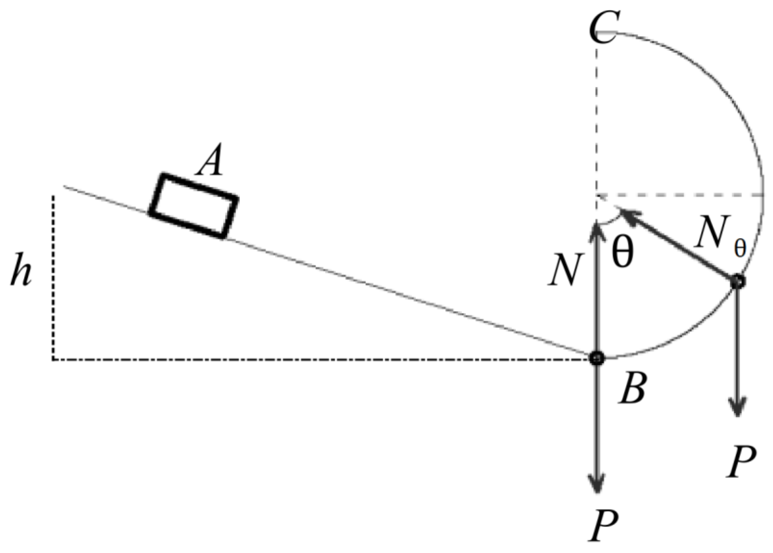
3) علاقة قوة رد الفعل الناظمي المؤثر على الجسيم أثناء حركته على المسار BC بدلالة H و $N_\theta = f(H)$

4) سرعة الجسيم عند وصوله النقطة C ورد اللفعل الناظمي؟ $v_C =?$, $N_C =?$

5) قيمة H حتى يعبر الجسيم الموقع C

الحل:

1) لإيجاد علاقة سرعة الجسيم عند وصوله الموقع B نطبق مبدأ العمل والطاقة بين الموضعين A (حيث $v_A = 0$) والموضع B (حيث $v_B =?$)



$$\frac{1}{2}m.v_B^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = W_P + W_N$$

حيث (عمودي على الانتقال) $W_N = 0$

$$\frac{1}{2}m.v_B^2 = m.g.H \Rightarrow v_B^2 = 2g.H$$

2) لإيجاد السرعة على المسار BC نطبق مبدأ العمل والطاقة بين وضعين

B (حيث $v_B^2 = 2g.H$) و θ (حيث $v_\theta = ?$)

$$\frac{1}{2}m.v_\theta^2 - \frac{1}{2}m.v_B^2 = W_P + W_{N\theta}$$

نلاحظ من الشكل ان الانتقال: $l = R - h$

$$h = R.cos\theta \Rightarrow l = R - R.cos\theta = r(1 - cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m.v_\theta^2 = -m.g.l + \frac{1}{2}m.v_B^2$$

$$v_\theta^2 = -2g.l + v_B^2 = -2g.R(1 - cos\theta) + 2g.H$$

$$\Rightarrow v_\theta^2 = 2g(-R(1 - cos\theta) + H)$$

3) لإيجاد علاقة رد الفعل على المسار BC نطبق العلاقة الأساسية في التحريك على الموضع العام على المسار BC:

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{A} \Rightarrow \overrightarrow{N_\theta} + \vec{P} = m.\vec{A}$$

نسقط على $\vec{n}$:

$$N_\theta - P.cos\theta = m.A^n$$

$$\Rightarrow N_\theta = m.A_\theta^n + P.cos\theta$$

$$N_\theta = m.\frac{v_\theta^2}{R} + P.cos\theta$$

نعوض v_θ^2: $N_\theta = m.\left(\frac{2g(H-R(1-cos\theta))}{R}\right) + m.g.cos\theta$

$$N_\theta = \frac{m.g}{R}\left(2H - 2R(1 - cos\theta)\right) + m.g.cos\theta$$

$$N_\theta = m.g\left\{\left(\frac{2H}{R} - 2 + 2cos\theta + cos\theta\right)\right\}$$

$$N_\theta = m.g\left(\frac{2H}{R} - 2 + 3cos\theta\right)$$

4) رد الفعل وسرعة الجسيم عند وصوله الى C

الموضع C يوافق $(\theta = \pi) \Longleftarrow (cos\theta = -1)$

$$v_\theta = 2g\{H - R(1 - cos\theta)\}$$

$$v_C = 2g\{H - R(1 - (-1)\} = 2g(H - 2R)$$

$$N_\theta = m.g\left(\frac{2H}{R} - 2 + 3cos\theta\right)$$

$$N_C = m.g\left(\frac{2H}{R} - 2 + 3(-1)\right) = m.g\left(\frac{2H}{R} - 5\right)$$

5) حتى يعبر الجسيم C يجب ان يكون: $N_C > 0 \;,\; v_C > 0$

$$v_C^2 = 2g(H - 2R) \Longrightarrow 2g(H - 2R) > 0$$

$$\Longrightarrow H - 2R > 0 \;\Longrightarrow H > 2R$$

$$N_C = m.g\left(\frac{2H}{R} - 5\right) \Longrightarrow m.g\left(\frac{2H}{R} - 5\right) > 0$$

$$\Longrightarrow \frac{2H}{R} - 5 > 0 \;\Longrightarrow H > \frac{5}{2}R$$

$$\Longrightarrow H > 2.5\,R$$

وهذا هو الشرط الاكبر.

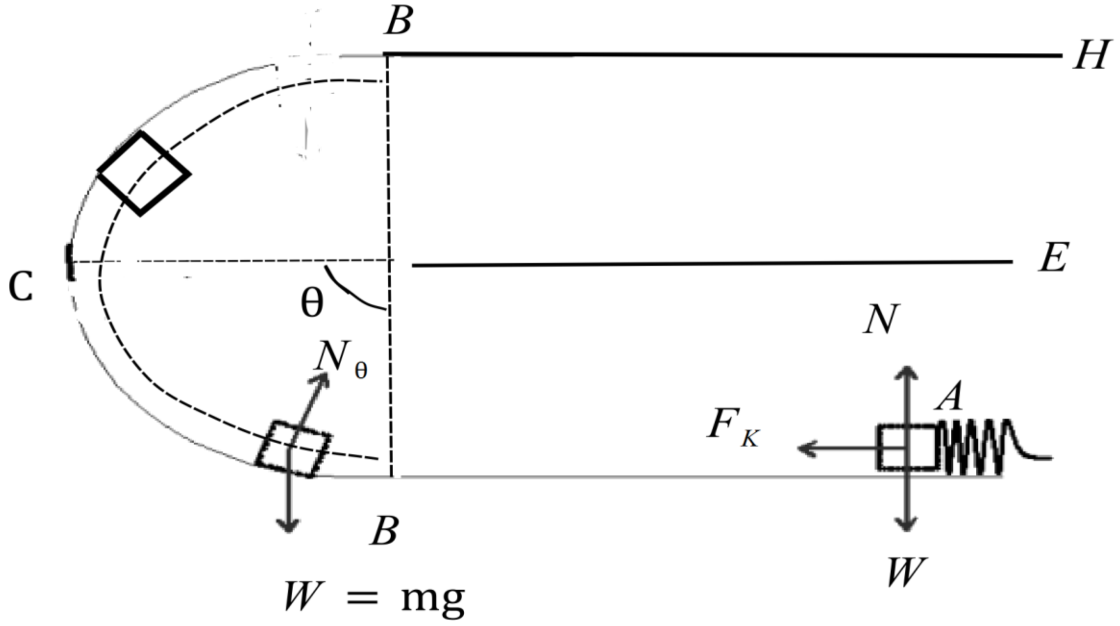
المسألة الثانية: /نابض يمس جسم/

وضع جسم على شكل عربة صغيرة كتلتها m في الموقع A بحيث يمس نابض مضغوط بمقدار Δl... يترك الجسم وشأنه لينزلق على سطح أملس BCD دائري نصف قطره R...

المطلوب:

1. علاقة سرعة الجسيم عند وضوله للموقع θ من المسار BCD $[v_\theta = ?]$
2. علاقة قوة القيد(قوة الضغط) في الموضع θ من المسار BCD $\{N_\theta = ?\}$
3. احسب قيمة k حتى يسقط الجسم على الحاجز E
4. احسب Δl حتى يسقط الجسم على الحاجز H

الحل:



لإيجاد علاقة السرعة عند الوضع θ من المسار BCD نطبق مبدأ العمل والطاقة على موضعين... A

حيث $v_A = 0$ وθ حيث $v_\theta = ?$:

$$\frac{1}{2}m.v_\theta^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = \sum W_F = W_W + W_{N_\theta} + W_{F_k}$$

ولكن يوجد لدينا: $v_A = 0 \, , W_{N_\theta} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m.v_\theta^2 = -m.g.h + \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$$

ومن الشكل (2) : $h = R(1 - cos\theta)$

ملاحظة: الإشارة السالبة لعمل الثقل لأن شعاع الثقل بعكس جهة الحركة (أو إن العمل مقاوم)

* لدينا: $\Delta l_{in}^2 = \Delta l$

$$\Delta l_{fin}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m.v_\theta^2 = -m.g.R(1 - cos\theta) + \frac{k}{2}\Delta l^2$$

$$\Rightarrow v_\theta^2 = \frac{k}{m}\Delta l^2 - 2.g.R(1 - cos\theta)$$

2- لإيجاد N_θ نطبق العلاقة الأساسية في التحريك على الجسيم في الوضع θ على المسار BCD:

$$\sum\vec{F} = m.\vec{A}_\theta = \overrightarrow{W} + \overrightarrow{N_\theta}$$

بإسقاط العلاقة السابقة على المحور $\vec{n}$:

$$N_\theta - w.cos\theta = m.A^n$$

$$\Rightarrow N_\theta = w.cos\theta + m.A^n$$

$$\Rightarrow N_\theta = m(\frac{v_\theta^2}{R} + g.cos\theta)$$

بتعويض v_θ^2 في العلاقة السابقة:

$$N_\theta = m\left[\frac{1}{R}\left(\frac{k}{m}\Delta l^2 - 2g.R(1 - cos\theta) + g.cos\theta\right)\right]$$

$$N_\theta = m\left[\frac{k}{Rm}\Delta l^2 - 2g + 2gcos\theta + g.cos\theta\right]$$

$$N_\theta = \frac{k}{R}\Delta l^2 - 2m.g + 3m.g.cos\theta$$

$$N_\theta = \frac{k}{R}\Delta l^2 + m.g(3cos\theta - 2)$$

3- الحاجز E يوافق النقطة c حيث $\theta_c = 90°$

شرط السقوط على الحاجز E : $N_c = 0, v_c > 0$

$$v_c > 0 \Rightarrow -2gR(1-cos\theta_c) + \frac{k}{m}\Delta l^2 > 0$$

$$\Rightarrow -2gR + \frac{k}{m}\Delta l^2 > 0 \Rightarrow \frac{k}{m}\Delta l^2 > 2gR \Rightarrow k > \frac{2g.R.m}{\Delta l^2}$$

وهو الشرط الاكبر لكي يتحقق المطلوب.

$$N_c = 0 \Rightarrow \frac{k}{R}\Delta l^2 + m.g(3cos\theta - 2) = 0$$

$$\frac{k}{R}\Delta l^2 - 2m.g = 0 \Rightarrow \frac{k}{R}\Delta l^2 = 2m.g \Rightarrow k = \frac{2m.R.g}{\Delta l^2}$$

4- الحاجزH يوافق النقطة D التي توافق $\theta_D = 180°$

الشروط اللازمة: $v_D > 0 , N_D = 0$

$$v_D > 0 \Rightarrow -2gR(1-cos\theta_D) + \frac{k}{m}\Delta l^2 > 0$$

$$-4gR = \frac{k}{m}\Delta l^2 > 0 \Rightarrow \Delta l^2 > \frac{4mgR}{k}$$

الشرط الاخر:

$$N_D = 0 \Rightarrow \frac{k}{R}\Delta l^2 + m.g(3cos\theta - 2) = 0$$

$$\frac{k}{R}\Delta l^2 - 5m.g = 0 \Rightarrow \Delta l^2 = \frac{5mgR}{k}$$

وهو الشرط الأقوى